

Starke Fokussierung bei Beschleunigern *

Von WALTER DÄLLENBACH **

(Z. Naturforschg. 9a, 1005—1012 [1954]; eingegangen am 14. September 1954)

Die Fragen der Stabilität, der Periodizität und der maximalen Elongation von Betatronschwingungen bei starker Fokussierung nach Courant, Livingstone, Snyder¹ lassen sich in einfacher und anschaulicher Weise quantitativ diskutieren. Es werden auch instabile Fälle betrachtet, da sie als semistabile Schwingungen bei Linear- und Spiralbeschleunigern Bedeutung bekommen können.

Die von Rose² beim Zyklotron diskutierte zusätzliche Fokussierung durch Querkomponenten der Beschleunigungsfelder liefert beim Synchrotron mit starker Fokussierung keinen Beitrag.

Erteilt man den N Magnet-Kombinationen eines Synchrotrons mit starker Fokussierung entsprechend den $6N$ Freiheitsgraden von N starren Körpern $6N$ Justierfehler, so lassen sich aus diesen die Bahnabweichungen erster Ordnung pro Umlauf berechnen. Durch Nachjustieren von vier dieser $6N$ Justierfehler können diese Bahnabweichungen pro Umlauf auf null gebracht werden.

Sind die $6N$ Justierfehler unabhängig voneinander und nach bekannten Verteilfunktionen zufällig verteilt, so lassen sich die mittleren Quadrate der Bahnabweichungen durch die mittleren Quadrate der Justierfehler ausdrücken.

Bahnabweichungen pro Umlauf führen bei mehreren Umläufen zu Resonanz oder Gegenresonanz, je nachdem $N\varphi$ ein gerades bzw. ein ungerades Vielfaches von π ist. Dabei bedeutet $0 < \varphi < \pi$ den für die Stabilität ($-1 < \cos \varphi < +1$) charakteristischen Winkel mit $\varphi = \pi/2$ für die Mitte des Stabilitätsbereichs.

Ein im Vergleich zu Courant et al.¹ etwas verallgemeinerter Ausdruck für die die Synchrotronoschwingungen bestimmende Bahnexpansion wird in einfacher Weise abgeleitet^{2a}.

1. Betatronschwingungen

Die einem Umlauf entsprechende ebene Bahn der ungestörten Teilchen eines Synchrotrons bestehe aus N kongruenten Abschnitten vom Zenitwinkel $\vartheta = 2\pi/N$. Die den N Abschnitten zugeordneten magnetischen Führungsfelder seien kongruent und eine Kombination eines fokussierenden und eines defokussierenden Sektors, jeder gefolgt von einem feldfreien Sektor. Fokussiert oder defokussiert ein Sektor in radialer Richtung, so defokussiert bzw. fokussiert er in axialer Richtung und umgekehrt.

Ist q die Querabweichung (in radialer oder axialer Richtung) eines gestörten Teilchens von der Bahn der ungestörten Teilchen und $p = \dot{q}/\omega$ eine zur Quergeschwindigkeit \dot{q} proportionale Länge, die Konstante $1/\omega$ also eine Zeit, so sind $\{q_1, p_1\}$ am Eintritt in eine Kombination bestimmt durch $\{q_0, p_0\}$ am Eintritt in die vorausgehende Kombination vermöge der linearen Transformation

$$q_1 = a_{11} q_0 + a_{12} p_0; \quad p_1 = a_{21} q_0 + a_{22} p_0. \quad (1)$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß innerhalb eines Sektors die magnetischen Führungsfelder in azimuthaler Richtung homogen sind, also sich an der Grenze benachbarter Sektoren unstetig ändern, daß im fokussierenden Sektor das gestörte Teilchen harmonisch gebunden und analog im defokussierenden Sektor von der Bahn der ungestörten Teilchen „harmonisch“ abgestoßen wird. Fehlen Dämpfungskräfte, die beispielsweise zu \dot{q} proportional sein könnten, so ist die Determinante

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1, \quad (2)$$

was — sofern nicht ausdrücklich anders verfügt ist — stets vorausgesetzt wird.

Die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sind abhängig von den Kennzahlen für die räumliche Inhomogenität der beiden magnetischen Führungsfelder im fokussierenden und im defokussierenden Sektor, von der azimuthalen Länge der Sektoren, aus

* Erweitert nach einem Vortrag am 22. 2. 54 im physikalischen Kolloquium der Universität Erlangen.

** Bern/Schweiz; Hallwylstraße 46.

¹ E. Courant, S. Livingstone u. H. Snyder, Phys. Rev. 88, 1190 [1952]. Dies ist die erste Veröffentlichung über das neue Prinzip der starken Fokussierung.

² M. E. Rose, Phys. Rev. 53, 392 [1938].

^{2a} Ein dieser vorläufigen Mitteilung entsprechender ausführlicher Bericht mit weiteren Ergebnissen und Ableitungen erscheint demnächst in der Zeitschrift für angewandte Physik.



welchen sich die Kombination zusammensetzt, und von Ladung, Ruhmasse und Geschwindigkeit des Teilchens.

Variiert man die Konstante $1/\omega$, so bleiben a_{11} , a_{22} , das Produkt $a_{12} \cdot a_{21}$ und die Determinante (2) ungeändert. Um eine einfache Berechnung der maximalen Elongation q_{\max} zu ermöglichen, wird $1/\omega$ gleich der Kreisfrequenz der Betatronschwingungen im fokussierenden Sektor gewählt. Bei dieser Normierung ist $q^2 + p^2$ innerhalb jedes fokussierenden Sektors proportional der Energie der Betatronschwingungen, also invariant und gleich q_{\max}^2 , falls innerhalb des betrachteten fokussierenden Sektors der Wert $p = 0$ vorkommt. In defokussierenden Sektoren sind wohl minimale, nie maximale Elongationen möglich.

Bildet man das Vektorprodukt

$$E = q_0 p_1 - q_1 p_0 \quad (3)$$

und setzt aus (1) einmal q_1 und p_1 , dann q_0 und p_0 ein, so folgt

$$\begin{aligned} E &= a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2 \\ &= a_{21} q_1^2 + (a_{22} - a_{11}) q_1 p_1 - a_{12} p_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

In der (q, p) -Zustandsebene liegen also die Spitzen der Vektoren $\{q_0, p_0\}$, $\{q_1, p_1\}$ und weiterer vermöge (1) daraus hervorgehender Vektoren auf dem Kegelschnitt mit der Mittelpunktsgleichung

$$a_{21} q^2 + (a_{22} - a_{11}) qp + a_{12} p^2 = E, \quad (5)$$

und die Fläche (3) des Parallelogramms, welches durch zwei vermöge (1) aufeinanderfolgende Vektoren aufgespannt wird, ist invariant und gleich E . Wäre die Determinante (2) ungleich 1, so würde an Stelle des Kegelschnitts (5) eine Kurve treten, welche sich zu (5) verhält wie eine archimedische Spirale zu einem Kreis.

Variiert E , so bestimmt (5) eine Schar konzentrischer, koaxialer und ähnlicher Kegelschnitte, die nur noch von den Koeffizienten der Transformation (1) abhängt. Es handelt sich um Ellipsen, Paare paralleler Geraden oder Hyperbeln, je nachdem ob die Diskriminante

$$\delta = -a_{21} a_{12} - \left[\frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\right]^2 \gtrless 0 \quad (6)$$

oder wegen (2) das Quadrat der halben Spur der Koeffizientenmatrix $a_{11} \dots a_{22}$

$$S^2 = \left[\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\right]^2 \gtrless 1 \text{ ist.} \quad (7)$$

Nur im Fall von Ellipsen bleibt der Zustandspunkt des gestörten Teilchens im Endlichen und ist die gestörte Bahn stabil.

Durch eine Drehung um χ , wo $0 \leq \chi < \pi/2$, wird die Kegelschnittgleichung (5) auf Hauptachsen transformiert. χ bestimmt sich eindeutig aus

$$\operatorname{tg}(2\chi) = (a_{22} - a_{11})/(a_{12} + a_{21}), \quad (8)$$

und für die Quadrate der Halbachsen a und b des Kegelschnitts erhält man

$$\begin{aligned} a^2 &= \left\{ \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2}(a_{21} - a_{12})\right]^2 - \delta} \right\} \frac{E}{\delta}, \\ b^2 &= \left\{ \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(a_{21} - a_{12})\right]^2 - \delta} \right\} \frac{E}{\delta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Es gilt das obere oder untere Vorzeichen der Wurzel, je nachdem $\operatorname{tg}(2\chi) \gtrless 0$.

Ist die Diskriminante nach (6) $\delta > 0$ (Ellipse), so hat E in der ganzen (q, p) -Ebene ein und dasselbe Vorzeichen. Setzt man in (4) für $\{q_0, p_0\}$ speziell $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$, so folgt, daß a_{21} und $-a_{12}$ stets das gleiche Vorzeichen wie E haben. Also sind $-a_{21} a_{12}$, ferner a^2 und b^2 in (9) positiv. Für $\delta = 0$ (Paar paralleler Geraden) ist das eine Halbachsenquadrat ∞ , das andere stets positiv und gleich $E/(a_{21} - a_{12})$. Für $\delta < 0$ (Hyperbel) haben a^2 und b^2 verschiedenes Vorzeichen.

Eine Parameterdarstellung der Kegelschnittgleichung (5) ist von besonderem Interesse. Im Fall der Ellipse, also für $\delta > 0$, was nach (7) mit

$$-1 < S < 1 \quad (10)$$

identisch ist, lautet sie

$$\begin{aligned} q &= q_0 \cos \Phi + q_0^* \sin \Phi, \\ p &= p_0 \cos \Phi + p_0^* \sin \Phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Für den Parameterwert $\Phi = \varphi$ sei $\{q, p\} = \{q_1, p_1\}$. Vermöge (1) folgt dann

$$\begin{aligned} q_0^* &= [(a_{11} - \cos \varphi) q_0 + a_{12} p_0] / \sin \varphi, \\ p_0^* &= [a_{21} q_0 + (a_{22} - \cos \varphi) p_0] / \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Verlangt man, daß $\{q_0^*, p_0^*\}$ ebenfalls (5) genüge, so muß die Spur der Koeffizientenmatrix von (12) verschwinden. Also ist

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = S \quad (13)$$

und wegen (10)

$$0 < \varphi < \pi. \quad (14)$$

$\{q_0^*, p_0^*\}$ ist der zu $\{q_0, p_0\}$ konjugierte Radiusvektor der Ellipse (5).

Setzt man speziell

$$\Phi = n\varphi \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

so erhält man für die durch wiederholte Anwendung der Transformation (1) bestimmten Zustandsvektoren vermöge (11)

$$\begin{aligned} q_n &= q_0 \cos(n\varphi) + q_0^* \sin(n\varphi), \\ p_n &= p_0 \cos(n\varphi) + p_0^* \sin(n\varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

Die bezüglich der Darstellung in der (q, p) -Zustandsebene anschauliche Bedeutung vom Φ und damit von n ergibt sich durch Betrachten des bei einer Änderung $d\Phi$ von $\{q, p\}$ überstrichenen Flächenelementes vom Inhalt

$$dF = \frac{1}{2} (qdp - pdq) \quad (17)$$

Setzt man (11) in (17) ein, so folgt

$$dF = \frac{1}{2} (q_0 p_0^* - q_0^* p_0) d\Phi$$

oder wegen (12) und (4)

$$dF = \frac{1}{2} E d\Phi / \sin \varphi \quad (18)$$

Φ ist also proportional der vom Radiusvektor $\{q, p\}$ überstrichenen Fläche der Ellipse. Ändert sich Φ um φ , was dem einmaligen Ausüben der Transformation (1) entspricht, so ist die überstrichene Fläche der Ellipse $(E/2) (\varphi / \sin \varphi)$, also größer als die halbe Fläche des Parallelogramms nach (4), entsprechend dem Umstand, daß ein Ellipsenbogen vom Mittelpunkt aus stets konkav ist.

Für Linear- und Spiralbeschleuniger, wo semistabile Betatronschwingungen zugelassen werden können, haben außer dem behandelten elliptischen auch Fälle Bedeutung, wo der Kegelschnitt eine Hyperbel oder ein Paar paralleler Geraden ist. Die (10), (13), (14), (16), (12) und (18) entsprechenden Formeln könnten ohne weiteres angeschrieben werden. Im stabilen, also elliptischen Fall ist bei der am Anfang festgesetzten Normierung von $1/\omega$ die große Halbachse der Ellipse in der Zustandsebene eine obere Grenze für die maximale Elongation q_{\max} der Betatronschwingungen. Damit ist auch klar, welchen Einfluß die Startbedingungen $\{q_0, p_0\}$ auf q_{\max} haben.

Im elliptischen Fall kann wegen (14) mit beliebiger Näherung $\varphi = (Z/M)\pi$ gesetzt werden, worin Z und M zueinander teilerfremde ganze Zahlen seien und $Z < M$. Durchläuft n die Reihe $1, 2, 3, \dots$, so wird $n\varphi$ in (16) erstmals ein ganzes Vielfaches von 2π für $n = M$, falls Z gerade, und für $n = 2M$, falls Z ungerade. Für solches n liefert (16) $q_n = q_0$ und $p_n = p_0$. Die Bahn schließt sich also und wiederholt sich von da an periodisch in Form einer Schwebung zwischen einer maximalen und einer minimalen Amplitude.

Auf die Frage, ob die betrachteten Betatronschwingungen eine Dämpfung erfahren, sei er-

innert, daß beim Zyklotron Rose² zwei Effekten der Querkomponenten des beschleunigenden elektrischen Feldes eine zusätzliche fokussierende Wirkung auf achsennahe Teilchenbahnen zugeschrieben hat. Beiden Effekten ist eigen: die Quergeschwindigkeit \dot{q} des gestörten Teilchens erfährt beim Passieren der als unendlich kurz angenommenen Beschleunigungsstrecke eine zur Querabweichung q proportionale unstetige Änderung.

Befindet sich zwischen der n -ten und der $(n+1)$ -ten Kombination eines Beschleunigers mit starker Fokussierung eine Beschleunigungsstrecke, in welche das gestörte Teilchen mit dem radialen oder axialen Zustandsvektor $\{q_n, p_n\}$ eintritt, so ist also dieser Zustandsvektor nach der Beschleunigung, also am Eintritt in die $(n+1)$ -te Kombination $\{q_n, p_n + \beta q_n\}$. Der Proportionalitätsfaktor β hängt ab von der Geometrie der Beschleunigungsstrecke, der zeitlichen Änderung des Beschleunigungsfeldes, der spezifischen Energie (Verhältnis zur Ruhenergie) des Teilchens und der Änderung, welche diese spezifische Energie beim Passieren der Beschleunigungsstrecke erfährt. Am Ende der $(n+1)$ -ten Kombination gilt also für den Zustandsvektor $\{q_{n+1}, p_{n+1}\}$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= a_{11} q_n + a_{12} (p_n + \beta q_n), \\ p_{n+1} &= a_{21} q_n + a_{22} (p_n + \beta q_n), \end{aligned}$$

also an Stelle der Transformation (1)

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= (a_{11} + \beta a_{12}) q_n + a_{12} p_n, \\ p_{n+1} &= (a_{21} + \beta a_{22}) q_n + a_{22} p_n, \end{aligned} \quad (19)$$

deren Determinante unverändert gleich 1 ist.

Falls jede Kombination von einer Beschleunigungsstrecke gefolgt ist und β für die Dauer einer Periode der gestörten Bahn als konstant angenommen werden kann, liegen nach (19) die Spitzen der Zustandsvektoren infolge β auf einem zu (5) benachbarten Kegelschnitt

$$(a_{21} + \beta a_{22}) q^2 + (a_{22} - a_{11} - \beta a_{12}) qp - a_{12} p^2 = \text{const},$$

was zeigt, daß bei starker Fokussierung die resultierende Fokussierung der durch β charakterisierten Querkomponenten des beschleunigenden elektrischen Feldes null ist. Dagegen ist mit adiabatischer Dämpfung der Betatronschwingungen zu rechnen.

Die Bahn des ungestörten Teilchens bleibt trotz der Zunahme der Teilchengeschwindigkeit v erhalten, falls gleichzeitig mit v das magnetische Führungsfeld B proportional zu $v/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ ge-

steigert wird. Dabei ändert sich auch das Verhältnis von v zur Kreisfrequenz Ω eines vollen Teilchenumlaufs nicht. Die Koeffizienten a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} der für die Kombination charakteristischen Transformation (1) hängen aber nur ab von der Geometrie der die Kombination ausmachenden Sektoren, von den die räumliche Inhomogenität des magnetischen Führungsfeldes in den einzelnen Sektoren kennzeichnenden Zahlwerten $(dB/dr)/(B/r)$ und vom Verhältnis v/Ω , also von Faktoren, die alle bei koordiniert zunehmendem v und B invariant sind. Da Stabilität und Periodizität der Bahn sowohl eines radial wie eines axial gestörten Teilchens durch die entsprechenden Koeffizienten $a_{11} \dots a_{22}$ bestimmt sind, ändern sich auch diese Bahneigenschaften bei koordiniert zunehmendem v und B nicht, ja die Bahn eines gestörten Teilchens mit gegebenen Startvektoren bliebe trotz zunehmendem v und B exakt erhalten, wenn die Querabweichungen q und damit auch die Quergeschwindigkeiten p keine adiabatische Dämpfung erfahren würden. Andererseits ist die Bahn eines gestörten Teilchens frei für die adiabatische Dämpfung, denn multipliziert man die Querabweichungen einer mit allen Bedingungen verträglichen Bahn mit einem konstanten Faktor, so erhält man wieder eine mit allen Bedingungen verträgliche Bahn.

Nach dem Ehrenfest'schen Adiabatenprinzip ist die über eine Periode eines konservativen periodischen Systems gemittelte kinetische Energie \bar{L} geteilt durch die Frequenz, mit welcher sich das System wiederholt, eine adiabatische Invariante. Sowohl für ein in radialer, wie ein in axialer Richtung gestörtes Teilchen, dessen Zustandspunkt ausgehend von $\{q_0, p_0\}$ in einer Periode die Ellipse (5) durchläuft und wieder nach $\{q_0, p_0\}$ zurückkehrt, kann der Ansatz gemacht werden

$$\bar{L} = (m/\sqrt{1-(v/c)^2}) \Omega^2 \cdot [a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2] \Psi. \quad (20)$$

Ψ ist nicht nur von den Koeffizienten $a_{11} \dots a_{22}$, sondern auch vom „Innern“ der Kombination, d. h. von der Geometrie und den Kennzahlen $(dB/dr)/(B/r)$ der magnetischen Führungsfelder in den einzelnen die Kombination konstituierenden Sektoren, und endlich von der Phase, also vom Verhältnis q_0/p_0 des Startvektors abhängig, dagegen unabhängig von den koordiniert zunehmenden v und B .

Die Frequenz, mit welcher sich das System wiederholt, ist proportional Ω . Folglich ist nach

(20) \bar{L}/Ω adiabatisch invariant. Da koordiniert $[m/\sqrt{1-(v/c)^2}] \Omega$ zum Magnetfeld B proportional zunimmt, muß das Produkt von B und $[a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2]$ eine Invariante sein. Infolge adiabatischer Dämpfung nehmen also alle Querabweichungen wie $1/\sqrt{B}$ ab. Dagegen nimmt \bar{L} wie Ω , also wie v zu. Dies verträgt sich mit den nach $1/\sqrt{B}$ abnehmenden Schwingungsamplituden, weil die transversale Masse und die durch Lorentz-Kräfte eBv bewirkte harmonische Bindung beide mit v zunehmen. Diese Verhältnisse sind ähnlich wie beim Fadenpendel mit adiabatisch kürzer werdender Fadenlänge.

Ist $\Delta B/B$ die relative Zunahme des Magnetfeldes pro ein Umlauf, so folgt für die relative Abnahme einer Querabweichung pro ein Umlauf $-\Delta q/q = (1/2) \Delta B/B$.

2. Der Einfluß von Justierfehlern

In Abb. 1 seien M das Zentrum und EMA die Ebene der ungestörten Teilchenbahn eines ideal justierten Synchrotrons mit N Kombinationen vom Zentriwinkel $\vartheta = 2\pi/N$. Das ungestörte Teilchen trete bei E in Richtung $z_0 \perp EM$ und im Abstand $R = \overline{EM}$ von M in eine dieser N Kombinationen ein und bei A in Richtung $z_1 \perp AM$ und wieder im Abstand $R = \overline{AM}$ von M aus ihr aus.

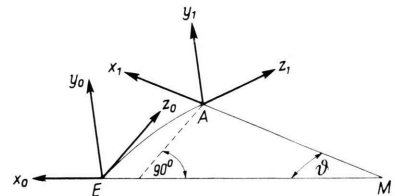


Abb. 1.

Der im Grundriß über ϑ $EMA = \vartheta$ befindlichen Kombination werde relativ zum rechtwinkligen Koordinatensystem (E, x_0, y_0, z_0) durch eine kleine Translation $\{\xi, \eta, \zeta\}$ und durch eine kleine Drehung $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ eine starre Verrückung in eine dejustierte Lage erteilt. $\{\xi, \eta, \zeta\}$ und $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ sind die sechs Justierfehler, welche eine solche Dejustierung der Kombination als Ganzes kennzeichnen. Welches ist deren Einfluß auf die Teilchenbahnen?

Würden die Koordinatensysteme (E, x_0, y_0, z_0) am Eingang und (A, x_1, y_1, z_1) am Ausgang der Kombination die Dejustierung der Kombination mitmachen, so kämen sie in die neuen Lagen (E', x_0', y_0', z_0') bzw. (A', x_1', y_1', z_1') .

Zu den beiden Gleichungen im System (E, x_0, y_0, z_0) einer gestörten, aber achsennahen Teilchenbahn können die entsprechenden Gleichungen im dejustierten System (E', x_0', y_0', z_0') angegeben werden. Damit sind die beiden (radial und axial) Zustandsvektoren des gestörten Teilchens am Eintritt in die dejustierte Kombination, also in der Ebene $z_0' = 0$, ausgedrückt durch die entsprechenden Zustandsvektoren am Eintritt in die Kombination vor der Dejustierung, also in der Ebene $z_0 = 0$, und die sechs Justierfehler. Die Zustandsvektoren am Eintritt in die dejustierte Kombination erfahren Transformationen wie (1). Man erhält dann die beiden Zustandsvektoren am Austritt aus der dejustierten Kombination, also in der Ebene $z_1' = 0$, aus denen sich wieder die Zustandsvektoren in der Ebene $z_1 = 0$ berechnen lassen. Dabei gehen der Zentriwinkel ϑ und nochmals die sechs Justierfehler ein. Das Ergebnis dieser Betrachtung ist: Die Wirkung der sechs Justierfehler auf eine achsennahe, im übrigen beliebige Teilchenbahn ist identisch mit plötzlichen Änderungen der Zustandsvektoren sowohl am Eintritt, wie am Austritt der nicht dejustierten Kombination. Diese Änderungen sind bis auf Glieder 1. Ordnung in den Justierfehlern

am Eintritt

$$\left. \begin{array}{l} \text{radial: } \Delta q_{0r} = -\xi, \quad \Delta p_{0r} = -\beta v/\omega_r; \\ \text{axial: } \Delta q_{0a} = -\eta, \quad \Delta p_{0a} = \alpha v/\omega_a; \end{array} \right\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_a &= \sum_{n=1}^N \Delta Q_{na} [\cos(N-n) \varphi_a + \frac{a_{11} - \cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} \sin(N-n) \varphi_a] + \sum_{n=1}^N \Delta P_{na} \frac{a_{12}}{\sin \varphi_a} \sin(N-n) \varphi_a, \\ \Delta P_a &= \sum_{n=1}^N \Delta P_{na} [\cos(N-n) \varphi_a + \frac{a_{22} - \cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} \sin(N-n) \varphi_a] + \sum_{n=1}^N \Delta Q_{na} \frac{a_{21}}{\sin \varphi_a} \sin(N-n) \varphi_a. \end{aligned} \quad (23)$$

φ_a ist der die Stabilität kennzeichnende Winkel φ für die axiale Richtung. Eben solche Ausdrücke gelten für die radiale Richtung.

Grundsätzlich ist möglich, aus (23) etwa α_N und γ_N bei beliebigen Werten der übrigen Justierfehler in (22) derart zu bestimmen, daß ΔQ_a und ΔP_a verschwinden. Ebenso können ξ_N und ζ_N derart nachjustierend gewählt werden, daß ΔQ_r und ΔP_r verschwinden. Durch Nachjustieren der vier Justierfehler einer Kombination kann also die Wirkung der übrigen durch den Zufall bestimmten $6N - 4$ Justierfehler kompensiert werden.

Verzichtet man auf Nachjustieren und nimmt man an, die $6N$ Justierfehler seien nach bekanntem

am Austritt

$$\left. \begin{array}{l} \text{radial: } \Delta q_{1r} = \beta R \sin \vartheta + \xi \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta, \\ \Delta p_{1r} = \beta v/\omega_r; \\ \text{axial: } \Delta q_{1a} = -[\alpha \sin \vartheta + \gamma (1 - \cos \vartheta)] R + \eta, \\ \Delta p_{1a} = -[\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] v/\omega_a. \end{array} \right\} \quad (21)$$

v ist die Teilchengeschwindigkeit und ω_r, ω_a sind die ω -Werte in radialer bzw. axialer Richtung, welche in $p = \dot{q}/\omega$ eingehen.

Erteilt man sämtlichen N Kombinationen Justierfehler, welche durch Indizes 1 bis N gekennzeichnet seien, so beträgt nach (21) der plötzliche Zuwachs der Zustandsvektoren am Ausgang der n -ten Kombination, welche mit der Wirkung der nun $6N$ Justierfehler identisch sind

$$\begin{aligned} \Delta Q_{nr} &= \beta_n R \sin \vartheta + \xi_n \cos \vartheta + \zeta_n \sin \vartheta - \xi_{n+1}, \\ \Delta P_{nr} &= \beta_n v/\omega_r - \beta_{n+1} v/\omega_r, \\ \Delta Q_{na} &= -[\alpha_n \sin \vartheta + \gamma_n (1 - \cos \vartheta)] R + \eta_n - \eta_{n+1}, \\ \Delta P_{na} &= -[\alpha_n \cos \vartheta + \gamma_n \sin \vartheta] v/\omega_a + \alpha_{n+1} v/\omega_a. \end{aligned} \quad (22)$$

Wären die $6N$ Justierfehler bekannt, so ließe sich aus (22) der plötzliche Zuwachs der vier Komponenten der Zustandsvektoren je am Ausgang der insgesamt N Kombinationen berechnen.

Vermöge (16) kann der auf die N Kombinationen verteilte Zuwachs nach (22) in einer Wirkung pro Umlauf ersetzt werden durch Werte $\{\Delta Q_r, \Delta P_r\}$ und $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$ am Ende beispielsweise der N -ten Kombination. Man findet für die axiale Richtung

ten Verteilungsfunktionen voneinander unabhängig zufällig verteilt, so lassen sich die Mittelwerte der Quadrate von $\Delta Q_a, \Delta P_a, \Delta Q_r, \Delta P_r$ allgemein als lineare homogene Funktionen der Mittelwerte $\overline{\xi^2}, \overline{\eta^2}, \overline{\zeta^2}, \overline{\alpha^2}, \overline{\beta^2}, \overline{\gamma^2}$ der Quadrate der sechs Komponenten der insgesamt $6N$ Justierfehler berechnen.

Die Ausdrücke für $\overline{\Delta Q_a^2}, \overline{\Delta P_a^2}, \overline{\Delta Q_r^2}, \overline{\Delta P_r^2}$ sollen als zu umfangreich hier nicht mitgeteilt werden. Nimmt man vereinfachend an, es handle sich um eine Kombination ohne feldfreie Sektoren, mit einem fokussierenden und einem defokussierenden Sektor von gleicher azimuthaler Länge und von gleicher Frequenz bezüglich Betatronschnwin-

gungen, also mit $\omega_a = \omega_r = \sqrt{\sigma} \Omega$, wo Ω die Umlaufkreisfrequenz und $\sigma = (\partial B / \partial r) / (B/R)$ die für die räumliche Inhomogenität des magnetischen Führungsfeldes charakteristische Zahl, ferner sei

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\eta}^2 = \bar{\zeta}^2 \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}^2 = \bar{\beta}^2 = \bar{\gamma}^2 = \bar{\xi}^2 / (R \vartheta)^2,$$

so spezialisieren sich für die Mitte des Stabilitätsbereiches, wo $\cos \varphi_a = 0$ und $\cos \varphi_r = 0$,

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta Q_r)^2} &= \overline{(\Delta P_r)^2} = (2,509)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta / \vartheta^2 \right. \\ &\quad \left. - [(1 + 2,301)/2,509] \sin \vartheta / \vartheta^2 \sqrt{\sigma} + 1/\vartheta^2 \sigma \right\} \bar{\xi}^2 N, \\ \overline{(\Delta Q_a)^2} &= \overline{(\Delta P_a)^2} = (2,509)^2 \left\{ 1 + (1 - \cos \vartheta) / \vartheta^2 \right. \\ &\quad \left. - [(1 + 2,301)/2,509] \sin \vartheta / \vartheta^2 \sqrt{\sigma} + 1/\vartheta^2 \sigma \right\} \bar{\xi}^2 N. \end{aligned} \quad (24)$$

Setzt man darin $\sin \vartheta \sim \vartheta$, so resultiert

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta Q_r)^2} &= \overline{(\Delta P_r)^2} = \overline{(\Delta Q_a)^2} = \overline{(\Delta P_a)^2} \\ &= (2,509)^2 \left\{ 1,500 - 1,315/\vartheta \sqrt{\sigma} + 1/\vartheta^2 \sigma \right\} \bar{\xi}^2 N. \end{aligned} \quad (25)$$

Für $\vartheta^2 \sigma$ kann man auch schreiben

$$\vartheta^2 \sigma = [\partial (1/\varrho) / \partial r] s^2 / \sqrt{E^2 - 1}. \quad (26)$$

Darin bedeuten $s = R \vartheta$ die azimutale Länge einer Kombination, $\varrho = mc/eB$ eine in Verbindung mit dem Teilchen der Ruhmasse m und der Ladung e für das Magnetfeld B charakteristische Länge und $E = 1 + eU/mc^2$ die spezifische Energie (Verhältnis zur Ruhenergie) des Teilchens mit der Voltgeschwindigkeit U . (26) läßt erkennen, daß (25) ohne weiteres auch für Linearbeschleuniger anwendbar ist.

Bei dem angegebenen¹ Beispiel eines Synchrotrons für 30 GeV-Protonen sind $\vartheta = 2\pi/120$ und $\sigma = 3600$, also $\vartheta^2 \sigma = \pi^2$. Dies in (25) eingesetzt, liefert

$$\sqrt{\overline{(\Delta Q_r)^2}} = 2,73 \sqrt{\bar{\xi}^2} \sqrt{N}. \quad (27)$$

Für die Justierfehler $\xi_1 \dots \xi_N$ der N Kombinationen eine Gaußsche Verteilung anzunehmen, bei welcher, wenn auch entsprechend selten, beliebig große Fehler vorkommen können, dürfte den wirklichen Verhältnissen nicht entsprechen. Zutreffender scheint, daß jeder der N -Justierfehler $\xi_1 \dots \xi_N$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit W innerhalb der maximal möglichen Abweichungen $-\xi_0$ und $+\xi_0$ liegt. Bei solcher Verteilungsfunktion sind $W = \xi_0/2$ und $\bar{\xi}^2 = \xi_0^2/3$. Damit wird aus (27)

$$\sqrt{\overline{(\Delta Q_r)^2}} = 1,58 \xi_0 \sqrt{N}. \quad (28)$$

Deutet man zur Interpretation dieser Gleichung die $6N$ Justierfehler als Komponenten eines Vektors J in einem $6N$ -dimensionalen Raum, so ge-

hört zu jeder individuellen Verwirklichung einer Maschinentype mit N Kombinationen ein und nur ein Vektor J , dessen Spitze nach Voraussetzung mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo innerhalb des $6N$ -dimensionalen Würfels mit Zentrum im Ursprung und Kanten der Länge $2\xi_0$ parallel den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt. Für einen bestimmten Vektor J ergeben sich aus (23) ganz bestimmte für die zu J gehörende Maschine feste Zuwachswerte $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$ und $\{\Delta Q_r, \Delta P_r\}$ pro Umlauf des Zustandsvektors in axialer bzw. radialer Richtung. Durch den Zufall bestimmt ist allein der durch den Vektor J repräsentierte individuelle Satz von $6N$ Justierfehlern, dagegen sind die Abweichungen der Teilchenbahn pro Umlauf durch J nach (23) streng determiniert. Für eine sehr große Anzahl G von individuellen, aber zufälligen und voneinander unabhängigen Verwirklichungen einer Maschinentype mit N Kombinationen erhält man G verschiedene Vektoren J_1, J_2, \dots, J_G . Zu diesen G Vektoren bestimmen sich nach (23) insgesamt $4G$ resultierende Zuwachswerte $\Delta Q_r, \Delta P_r, \Delta Q_a, \Delta P_a$. Die hiervon gebildeten quadratischen Mittelwerte mit dem schließlichen Ergebnis (28) beziehen sich auf diese Systemgesamtheit von individuellen Verwirklichungen und zeigen, mit welcher Abweichung $\sqrt{\overline{(\Delta Q_r)^2}}$ in Funktion von $\sqrt{\bar{\xi}^2}$ bzw. ξ_0 man etwa bei einer individuellen Verwirklichung ohne Nachjustieren einzelner Kombinationen zu rechnen hat. Nachdem der durch die Justierfehler verursachte Zuwachs $\{\Delta Q_1, \Delta P_1\}$ sowohl des radialen als des axialen Zustandsvektors pro Umlauf berechnet ist, erhebt sich die Frage, welcher Zuwachs $\{\Delta Q_m, \Delta P_m\}$ der Zustandsvektoren sich bei m -Umläufen ergibt.

Ist $\Phi = N\varphi$, so liefert (11)

$$\begin{aligned} \Delta Q_m &= \Delta Q_1 [1 + \cos \Phi + \cos 2\Phi + \dots + \cos (m-1)\Phi] \\ &\quad + \Delta Q_1^* [\sin \Phi + \sin 2\Phi + \dots + \sin (m-1)\Phi]. \end{aligned}$$

Dafür kann auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta Q_m &= \frac{1}{2} \Delta Q_1 \left[1 - \cos m\Phi + \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} \sin m\Phi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta Q_1^* \left[\frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} (1 - \cos m\Phi) - \sin m\Phi \right] \end{aligned} \quad (29)$$

und analog

$$\begin{aligned} \Delta P_m &= \frac{1}{2} \Delta P_1 \left[1 - \cos m\Phi + \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} \sin m\Phi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta P_1^* \left[\frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} (1 - \cos m\Phi) - \sin m\Phi \right]. \end{aligned}$$

Nach (29) pendelt ΔQ_m mit wachsendem m mit der Amplitude

$$\sqrt{1/2 [(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_1^*)^2] / (1 - \cos \Phi)}$$

um den Mittelwert

$$1/2 \{ \Delta Q_1 + [\sin \Phi / (1 - \cos \Phi)] \Delta Q_1^* \}$$

und analog auch ΔP_m .

Die durch $\{\Delta Q_1, \Delta P_1\}$ repräsentierten Justierfehler vermögen also die Stabilität der Teilchenbahn nicht zu stören, solange man den durch $\cos \Phi = 1$ charakterisierten Resonanzstellen fernbleibt. In der Nähe einer Gegenresonanzstelle mit $\cos \Phi = -1$ muß $\Phi = N\varphi = N(Z/M)\pi$ nahe einem ungeraden Vielfachen von π sein. $Z < M$ und M sind entsprechend den Ausführungen oben zueinander teilerfremde natürliche Zahlen. Insbesondere für die Mitte des Stabilitätsbereiches ist M nahe $2Z$, etwa $M = 2Z \pm 1$, wo $Z \gg 1$. Bedingung für Gegenresonanz wäre dann ein ungerades $N/2$.

Es sind nur Dejustierungen der als starr angenommenen N Kombinationen betrachtet worden. Der Einfluß von Justierfehlern in der inneren Geometrie der Kombinationen, insbesondere der magnetischen Führungsfelder, kann in analoger Weise ermittelt werden.

3. Synchrotronschwingungen

Die Synchrotron- oder Phasenschwingungen, welche ein in der Energie vom synchronen abweichendes asynchrones Teilchen ausführt, werden durch drei Gleichungen beherrscht (vgl. etwa³⁾

- a) den Energiesatz beim Passieren der Beschleunigungsstrecke,
 - b) eine kinematische Beziehung, welche die Phasendifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Beschleunigungen mit der Abweichung von der Dauer des Umlaufs eines synchronen Teilchens verknüpft und
 - c) wie die Abweichung ϑ von der Dauer Θ des Umlaufs eines synchronen Teilchens mit der Abweichung ε oder p von der spezifischen Energie E bzw. dem Impuls P eines synchronen Teilchens variiert.
- a) und b) sind Differenzgleichungen, die, sobald der Energiezuwachs pro Beschleunigung zur Abweichung der Energie von der Energie des synchronen Teilchens klein ist, durch Differential-

gleichungen approximiert werden können. Nur die Gleichung c) hängt von der Teilchenbahn und damit von der Fokussierung ab. Sie lautet

$$\vartheta/\Theta = (\varrho - E^{-2}) (p/P). \quad (30)$$

Für ein Synchrotron mit homogener Fokussierung ist $\varrho = 1/(1 - \sigma)$, wo $\sigma = (\partial B/\partial r) (B/R)$ die für die räumliche Inhomogenität des magnetischen Führungsfeldes charakteristische Kennzahl. Der Term $-E^{-2}$ trägt dem Umstand Rechnung, daß die Bahn wegen p/P schneller durchlaufen wird, während der Term ϱ die Expansion der Bahn infolge p/P berücksichtigt.

Für eine Kombination ohne feldfreie Sektoren, mit einem in radialer Richtung fokussierenden Sektor vom Zentriwinkel ϑ_f , einem in radialer Richtung defokussierenden Sektor vom Zentriwinkel ϑ_d und den respektiven Kennzahlen $\sigma_f > 0$ und $\sigma_d < 0$ gehorcht ein mit p/P asynchrones Teilchen den Gleichungen für Betatronschwingungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \omega_f^2 (r - a_f) &= 0; \\ \ddot{r} + \omega_d^2 (r - a_d) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Darin ist r die Zunahme des Radius gegenüber dem Radius R der Bahn des ungestörten synchronen Teilchens,

$$\begin{aligned} \omega_f^2 &= (1 + \sigma_f) \Omega^2, \\ \omega_d^2 &= (1 + \sigma_d) \Omega^2, \end{aligned} \quad (32)$$

Ω die Kreisfrequenz eines Umlaufs, ferner

$$\begin{aligned} (a_f/R) (\omega_f/\Omega)^2 &= p/P, \\ (a_d/R) (\omega_d/\Omega)^2 &= p/P, \end{aligned} \quad (33)$$

wo a_f und a_d die Zunahme des Radius gegenüber R für die zum Impuls $P + p$ gehörende stationäre Kreisbahn im fokussierenden bzw. im defokussierenden Sektor bedeuten. Zu jedem p/P gibt es eine und nur eine stationäre und durch (31) bestimmte Bahn, welche die Kombination mit den gleichen Werten von r und \dot{r} betritt und verläßt, sich also mit dem Zentriwinkel $\vartheta_f + \vartheta_d$ der Kombination periodisch wiederholt. Rechnet man den Mittelwert \bar{r} längs dieser Bahn und beachtet man, daß

$$\bar{r}/R = \varrho (p/P),$$

so erhält man für den Koeffizienten ϱ in (30) für den betrachteten Fall mit starker Fokussierung

$$\begin{aligned} \varrho = & \frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)] (\sigma_f - \sigma_d)}{1/(1 + \sigma_f) (1 + \sigma_d)} \frac{2 \vartheta_f \vartheta_d}{\vartheta_f + \vartheta_d} \\ & \cdot \left[u_f \vartheta_d \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + u_d \vartheta_f \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ & + [\vartheta_f/(1 + \sigma_f) + \vartheta_d/(1 + \sigma_d)]/(\vartheta_f + \vartheta_d). \end{aligned} \quad (34)$$

³ W. Dällenbach, Ann. Phys. 3, 89 [1948].

Darin ist

$$u_f = \omega_f \vartheta_f / \Omega, \quad u_d = \omega_d \vartheta_d / \Omega. \quad (35)$$

Nimmt man an, daß fokussierender und defokussierender Sektor von gleicher azimuthaler Länge sind, also $\vartheta_f = \vartheta_d$, so spezialisiert sich (34) zu

$$\varrho = \frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)] (\sigma_f - \sigma_d)}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(1 + \sigma_d)}} \cdot \left[u_f \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + u_d \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} + \frac{1}{2} [1/(1 + \sigma_f) + 1/(1 + \sigma_d)]. \quad (36)$$

Dies stimmt mit der Gl. (8) der Arbeit von Courant et al.¹ bis auf das Vorzeichen des ersten Terms von (36) überein, eine Diskrepanz, welche im Prinzip davon herrührt, daß die Autoren¹ das Vorzeichen von $(-1)^{3/2} = \pm i$ nicht diskutieren

und im Endresultat verkehrt angeben, wie wenn mit positivem p/P die Bahnlänge abnähme. In (34) und (36) ist die Wurzel positiv zu nehmen. Beachtet man, daß im defokussierenden Sektor $\sigma_d < 0$, also wegen (32) und (35) u_d/i reell, so läßt sich (34) schreiben

$$\varrho = \frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)] (\sigma_f - \sigma_d)}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(-1 - \sigma_d)}} \frac{2 \vartheta_f \vartheta_d}{\vartheta_f + \vartheta_d} \cdot \left[u_f \vartheta_d \operatorname{Cotg} \left(\frac{u_d}{2i} \right) - \left(\frac{u_d}{i} \right) \vartheta_f \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} + [\vartheta_f/(1 + \sigma_f) + \vartheta_d/(-1 - \sigma_d)]/(\vartheta_f + \vartheta_d). \quad (37)$$

Für $\vartheta_f = \vartheta_d$, $\sigma_f = -\sigma_d = \sigma \gg 1$ und die Mitte des Stabilitätsbereiches $u_f = u_d/i = \pi/2$ wird aus (37)

$$\varrho = 8/\pi [\operatorname{Cotg}(\pi/4) - \operatorname{cotg}(\pi/4)] \sigma = 4,85/\sigma. \quad (38)$$

Herrn Dr. W. Humbach (Erlangen) danke ich verbindlichst für den Hinweis auf Literatur⁴.

⁴ Weitere Literatur: R. Wideröe, Schweizer Arch. angew. Wiss. Techn. **13**, 225, 299 [1947]. — N. M. Blachmann, Rev. Sci. Instr. **22**, 569 [1951]. — K. J. Le Couteur, Proc. Phys. Soc. B **64**, 1073 [1951]. — M. Hoyaux, Atomics, Lond. **2**, 310 [1951]. — D. C. de Packh, Phys. Rev. **86**, 433 [1952]. — M. Hoyaux, Atomics, Lond. **3**, 33 [1952]. — C. Simone, Elektr. Obz. **41**, 362 [1952]. — E. R. Caianiello, Nuovo Cim. **10**, 581 [1953]. — E. R. Caianiello u. A. Turrin, Nuovo Cim. **10**, 594 [1953]. — M. Sands u. B. Touschek, Nuovo Cim. **10**, 604 [1953]. — T. Kitagaki, Phys. Rev. **89**, 1161 [1953]. — E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder u. J. P. Blewett, Phys. Rev. **91**, 202 [1953]. — E. D. Courant, Phys. Rev. **91**, 456 [1953]. — Stig Lundquist, Phys. Rev. **91**, 981 [1953]. — L. Good, Phys. Rev. **92**, 538 [1953]. —

B. C. Carlson, Phys. Rev. **92**, 839 [1953]. — B. Cork u. E. Zajec, Phys. Rev. **92**, 853 [1953]. — J. S. Bell, Nature, Lond. **171**, 167 [1953]. — J. B. Adams, M. G. N. Hine u. J. C. Lawson, Nature, Lond. **171**, 926 [1953]. — M. S. Livingstone, Nucleonics **11**, 12 [1953]. — Chihiro Hayashi, J. Appl. Phys. **24**, 344 [1953]. — L. A. Pipes, J. Appl. Phys. **24**, 902 [1953]. — M. H. Blewett, Rev. Sci. Instr. **24**, 725 [1953]. — I. S. Blumenthal, Amer. J. Phys. **21**, 164 [1953]. — W. Paul u. H. Steinwedel, Z. Naturforschg. **8a**, 448 [1953]. — E. Bodenstedt, Z. Naturforschg. **8a**, 502 [1953]. — J. Seiden, C. R. Acad. Sci. (Paris) **236**, 1145 [1953]. — G. Lüders, Phys. Verh. **4**, 24, 149 [1953]. — Ch. Schmelzer, Physikertagung Innsbruck, Physik-Verlag, Mosbach/Baden, 1954, S. 16 bis 36.

The Chemical Separation of Isotopes as a Problem of Rectification

By CESARE MARCHETTI

Laboratori CISE, Milano

(Z. Naturforschg. **9a**, 1012—1016 [1954]; eingegangen am 15. März 1954)

In this paper the best operation of a column for separating isotopes by chemical exchange reactions and the best cascading of a plant are discussed.

The results are presented in a form directly utilisable by the plant-designer.

The method for separating the stable isotopes by means of chemical exchange reactions developed by Urey and collaborators permits the processing of large amounts of material in plants very similar to those used in the fractional distillation technique, thus making possible the production of separated or enriched isotopes on an industrial scale.

This method has been successfully applied to the separation of ^{13}C , ^{15}N , ^{18}O , ^{34}S , which are rather important as biological tracers, and of deuterium, which is very important in nuclear technology. Having in mind production on an industrial scale, great care has to be applied to proper planning of the flow sheet of the plant, remembering that the main goals are cheap product, rugged plants, and